

STUDIA METODOLOGICZNE

Marcin MURASZEW

Algorytm ustalania arbitralnej aproksymacji całkowitoliczbowej wielowymiarowego wektora danych rzeczywistych w kontekście badań reprezentacyjnych

W praktyce statystycznej bardzo często wykorzystywany jest algorytm losowania jednostopniowego warstwowego bez zwracania. Jednym z głównych zadań stojących przed praktykami stosującymi ten schemat nie jest *de facto* sam proces wyboru próby, ale ustalenie tzw. alokacji, czyli przypisanie każdej warstwie liczby jednostek, które znajdą się w próbie. Do najczęściej stosowanych w GUS sposobów ustalania alokacji prób należy: alokacja proporcjonalna, schemat Neymana (Brach a, 1996; Zasępa, 1962, 1972) i metoda Lednickiego i Wieczorkowskiego (Lednicki, Wieczorkowski, 2003). Te metody prowadzą na ogół do uzyskania na wyjściu alokacji niebędącej wektorem liczb całkowitych. W kolejnym kroku wektor ten zostaje poprawiony przez przybliżenie kolejnych składowych liczbami całkowitymi. Nie ma ogólnej metodologii opisującej, w jaki sposób należy szukać takiego przybliżenia.

W artykule przedstawiam autorski algorytm służący do przybliżania całkowitoliczbowego w opisanym przypadkach. Opisałem tu praktyczne zastosowanie

algorytmu w kontekście zastosowania schematu losowania jednostopniowego warstwowego bez zwracania.

CZY ZAGADNIENIE PRZYBLIŻANIA CAŁKOWITOLICZBOWEGO JEST ISTOTNE Z PUNKTU WIDZENIA ZASTOSOWAŃ?

Jak już wspomniano, nie ma metodologii mówiącej o tym, w jaki sposób szukać przybliżenia całkowitoliczbowego alokacji. Naturalnym pomysłem jest przybliżenie w dół poprzez wzięcie największej liczby całkowitej nie większej od zadanej lub w górę — najmniejszej liczby całkowitej nie mniejszej od zadanej. Innym pomysłem jest przyjęcie, że na każdej składowej wektora alokacji dokonujemy przybliżenia poprzez wzięcie najbliższej liczby całkowitej. Stosuje się także tzw. przybliżenie losowe, polegające na dopisaniu wektora liczb losowych z rozkładu jednostajnego na przedziale $(0,1)$ i porównaniu składowych alokacji ze składowymi tego wektora. Jeśli mantysa składowej z wektora alokacji jest mniejsza od mantysy składowej z wektora liczb losowych, przybliżamy do liczby całkowitej w dół, jeśli większa — w górę.

Zauważmy, że każdy spośród wymienionych sposobów przybliżenia może powoduje zmianę sumy wektora. W niektórych przypadkach zmiana ta jest na tyle mała, że nie ma większego znaczenia. Szczególnie zachodzi to w przypadku, w którym ilość warstw jest relatywnie mała w stosunku do liczebności próby. Ma to miejsce w takich sytuacjach, kiedy 20000 jednostek alokowanych jest pomiędzy 100 warstw. Wówczas rozważania na temat wyboru sposobu przybliżenia całkowitoliczbowego pozostają bez istotnego znaczenia praktycznego. Nie jest przecież szczególnie istotne, w kontekście jakości badania, czy próba będzie liczyła 20000 jednostek czy 20020.

Problem przybliżenia całkowitoliczbowego staje się istotny w dwu przypadkach:

- 1) gdy warstwy są dosyć drobne, np. w sytuacji, gdy próba licząca 20000 alokowana jest pomiędzy 1000 warstw. Wówczas różnice wielkości próby, wynikające z wyboru przybliżenia, w skrajnych przypadkach mogą sięgać 500. Jest zatem istotne, czy wylosujemy 19500 czy 20500 jednostek;
- 2) gdy alokacja w warstwach musi być ustalona w ten sposób, aby w każdej warstwie liczba jednostek losowania była podzielna przez ustaloną liczbę, np. 13. Taka sytuacja ma miejsce w badaniach, w których losowane są próby kwartalne, a następnie dzielone są na 13 tygodni. Występuje to chociażby w BAEL czy badaniu transportu. Przyjmując w tym wypadku prostą metodę przybliżania całkowitoliczbowego¹, można znacząco odbiec od założenia co do wielkości próby.

¹ Problem znalezienia przybliżenia zadanego wektora liczb rzeczywistych w zbiorze wektorów o składowych podzielnych przez 13 w rzeczywistości prowadzi się do problemu przybliżenia całkowitoliczbowego. Wystarczy w tym celu składowe wyjściowego wektora podzielić przez 13, znaleźć przybliżenie całkowitoliczbowe, a następnie wynik pomnożyć przez 13.

ALGORYTM ZNAJDOWANIA ALOKACJI CAŁKOWITOLICZBOWEJ

Niech n oznacza liczebność próby, L — liczbę warstw, N_h — liczbę jednostek populacji w h -tej warstwie, $h = 1, 2, \dots, L$. Załóżmy, że mamy już znaleziony wektor liczb rzeczywistych $(x_1, \dots, x_L)$, w którym przy najmniej jedna składowa nie jest liczbą całkowitą, spełniający warunki:

- 1) $\sum_{h=1}^L x_h = n$,
- 2) $0 < x_h \leq N_h$ dla każdego $h = 1, 2, \dots, L$.

Naszym zadaniem będzie znalezienie takiego wektora liczb naturalnych $(n_1, \dots, n_L)$, który spełnia warunki 1) i 2) oraz „jest bliski” wektorowi $(x_1, \dots, x_L)$. Mówiąc, że dwa wektory „są bliskie”, zawsze mamy na myśli pewną miarę tryk². Na potrzeby artykułu ustalmy, że będziemy szukać najbliższego elementu w świetle metryki l_1 , zwanej manhattańską lub miejską³.

Wektor $(n_1, \dots, n_L)$ spełniający warunki 1) i 2) uznamy zatem za wektor najbliższy wektorowi $(x_1, \dots, x_L)$, jeśli będzie on spełniał własność 3):

- 3) dla każdego wektora liczb naturalnych $(\tilde{n}_1, \dots, \tilde{n}_L)$, spełniającego warunki 1) i 2), zachodzi nierówność: $\sum_{h=1}^L |n_h - x_h| \leq \sum_{h=1}^L |\tilde{n}_h - x_h|$.

Algorytm

Dla parametru $t \in [0, 1]$ oraz $x \in R$ zdefiniujemy funkcję φ_t w następujący sposób:

$$\begin{aligned}\varphi_t(x) &= \lfloor x \rfloor \quad \text{dla } x - \lfloor x \rfloor < t \\ \varphi_t(x) &= \lceil x \rceil \quad \text{dla } x - \lfloor x \rfloor \geq t\end{aligned}$$

Przez symbol $\lfloor \cdot \rfloor$ rozumiemy część z liczby, natomiast $\lceil x \rceil = \lfloor x \rfloor + 1$ dla x nie należącego do liczb całkowitych i $\lceil x \rceil = x$ dla x będącego liczbą całkowitą.

² W tym wypadku metrykę w przestrzeni R^L .

³ Odległość w tej metryce definiuje się zgodnie ze wzorem: $d((x_1, \dots, x_L), (y_1, \dots, y_L)) = \sum_{i=1}^L |x_i - y_i|$.

Zauważmy, że $\varphi_0(x) = \lceil x \rceil$, $\varphi_1(x) = \lfloor x \rfloor$, a $\varphi_{0,5}$ jest funkcją zaokrąglenia całkowitoliczbowego w górę. Następnie dla danego wektora liczb $(x_1, \dots, x_L)$ o własnościach 1) i 2) zdefiniujemy funkcję Ψ :

$$\Psi_{(x_1, \dots, x_L)}(t) = (\varphi_t(x_1), \dots, \varphi_t(x_L))$$

Oczywiście, dla każdego $t \in [0, 1]$ wartości funkcji $\Psi_{(x_1, \dots, x_L)}(t)$ są liczbami naturalnymi ze zbioru $\{0, \dots, N_1\} \times \dots \times \{0, \dots, N_L\}$. Pozostaje wybrać taki parametr t , dla którego

$\sum_{i=1}^L \varphi_t(x_i) = n$. Zauważmy, że $\sum_{i=1}^L \varphi_0(x_i) > n$ oraz $\sum_{i=1}^L \varphi_1(x_i) < n$, a przy tym funkcja $t \rightarrow \sum_{i=1}^L \varphi_t(x_i)$ jest funkcją schodkową, malejącą w swojej dziedzinie oraz stałą w przedziałach prawostronnie domkniętych. Można zatem znaleźć wartość t_0 taką, że w przedziale $[0, t_0]$ $\sum_{i=1}^L \varphi_t(x_i) \geq n$, natomiast w przedziale $(t_0, 1]$ $\sum_{i=1}^L \varphi_t(x_i) < n$. Ścisłe rzecz biorąc, t_0 określone jest wzorem:

$$t_0 = \max \left\{ t : \sum_{i=1}^L \varphi_t(x_i) \geq n \right\}$$

Teraz należy uwzględnić 2 przypadki:

1. $x_i - \lfloor x_i \rfloor \neq x_j - \lfloor x_j \rfloor$ dla każdych $i \neq j$, $i, j \in \{1, 2, \dots, L\}$. Sytuacja ta zdarza się najczęściej. Wówczas funkcja $t \rightarrow \sum_{i=1}^L \varphi_t(x_i)$ jest funkcją schodkową mającą tę własność, że każdy „uskok” tego schodka jest dokładnie równy 1. Dlatego szczególnie dla zdefiniowanego t_0 zachodzi równość $\sum_{i=1}^L \varphi_{t_0}(x_i) = n$. Zatem szukany wektor $(n_1, \dots, n_L)$ jest równy dokładnie wektorowi $(\varphi_{t_0}(x_1), \dots, \varphi_{t_0}(x_L))$.
2. Jeśli istnieją takie parametry $i \neq j$, $i, j \in \{1, 2, \dots, L\}$ że $x_i - \lfloor x_i \rfloor = x_j - \lfloor x_j \rfloor$, to w szczególności może zdarzyć się sytuacja, w której $\sum_{i=1}^L \varphi_{t_0}(x_i) > n$.

Zdefiniujmy k jako:

$$k = \sum_{i=1}^L \varphi_{t_0}(x_i) - n$$

Istnieje co najmniej k składowych wektora $(x_1, \dots, x_L)$ takich, że $x_i - \lfloor x_i \rfloor = t_0$.

Dla zdefiniowania wektora $(n_1, \dots, n_L)$ przyjmujemy $n_i = \varphi_{t_0}(x_i) - 1$ dla dowolnych k składowych, dla których spełniona jest własność $x_i - \lfloor x_i \rfloor = t_0$ oraz $n_i = \varphi_{t_0}(x_i)$ dla wszystkich pozostałych składowych.

Pozostaje jeszcze udowodnić, że znaleziony wektor $(n_1, \dots, n_L)$ spełnia własność 3). Korzystając z lematu umieszczonego na końcu artykułu oraz z następującej własności: $\varphi_t(x+k) = \varphi_t(x) + k$, dla $t \in (0,1)$, x — rzeczywistego, k — całkowitego, łatwo można pokazać, że $(n_1, \dots, n_L)$ istotnie spełnia własność 3).

$$\text{PRZYKŁAD FUNKCJI } t \rightarrow \sum_{i=1}^L \varphi_t(x_i)$$

A oto wykres funkcji $t \rightarrow \sum_{i=1}^L \varphi_t(x_i)$ przykładowego wektora liczb $(x_1, \dots, x_8)$, którego składowe są równe odpowiednio: 7,11; 8,28; 2,28; 13,49; 21,49; 15,57; 75,77; 30,9:

LEMAT

Dla danych liczb $t_1, \dots, t_L \in (0,1)$, spełniających warunek $t_1 + \dots + t_L = k$, dla pewnego k będącego liczbą naturalną, rozwiązaniem optymalnym w zbiorze:

$$X = \{(a_1, \dots, a_L) \in \{0,1\}^L : \sum_{i=1}^L a_i = k\}$$

czyli najbliższym punktowi $(t_1, \dots, t_L)$ ze względu na metrykę l_1 elementem ze zbioru X , jest rozwiązanie dane wzorem $(0, \dots, 0, 1, \dots, 1)$, gdzie zera są na pozycjach $1, 2, \dots, L-k$, a jedynki na pozycjach $L-k+1, \dots, L$. Będziemy to oznaczać $(0_1, \dots, 0_{L-k}, 1_{L-k+1}, \dots, 1_L)$

Dowód

Bez straty możemy założyć, że:

$$0 < t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_L < 1$$

Wówczas dla wektora $(0_1, \dots, 0_{L-k}, 1_{L-k+1}, \dots, 1_L)$

$$d((t_1, \dots, t_L), (0_1, \dots, 0_{L-k}, 1_{L-k+1}, \dots, 1_L)) = t_1 + \dots + t_{L-k} + (1 - t_{L-k+1}) + \dots + (1 - t_L)$$

Dowolny ciąg $(a_1, \dots, a_L) \in X$ jest zatem ciągiem k jedynek i $L-k$ zer. Łatwo więc za uważać, że na pierwszy $L-k$ składowych i na ostatnich k składowych jest dokładnie tyle samo różnic względem wektora $(0_1, \dots, 0_{L-k}, 1_{L-k+1}, \dots, 1_L)$. Mówiąc ściślej, zbiory:

$$I = \{i = L-k+1, \dots, L : a_i = 0\}$$

oraz

$$\tilde{I} = \{i = 1, \dots, L-k : a_i = 1\}$$

są równoliczne.

Dla dowolnego zbioru S oznaczmy przez $\#$ liczebność zbioru S . Mamy:

$$p = \#I = \#\tilde{I} \text{ oraz } I = \{i_1, \dots, i_p\}, \tilde{I} = \{\tilde{i}_1, \dots, \tilde{i}_p\}.$$

Dla dowolnej pary $(i, \tilde{i}) \in I \times \tilde{I}$ zachodzi nierówność $t_i \geq t_{\tilde{i}}$, czyli:

$$t_{\tilde{i}} + (1 - t_i) \leq 1 \text{ oraz } (1 - t_{\tilde{i}}) + t_i \geq 1 \quad (1)$$

Stąd:

$$\begin{aligned} d((t_1, \dots, t_L), (a_1, \dots, a_L)) &= [t_1 + \dots + t_{L-k} + (1 - t_{L-k+1}) + \dots + (1 - t_L)] + \\ &- [t_{\tilde{i}_1} + (1 - t_{i_1}) + \dots + t_{\tilde{i}_p} + (1 - t_{i_p})] + [(1 - t_{\tilde{i}_1}) + t_{i_1} + \dots + (1 - t_{\tilde{i}_p}) + t_{i_p}] = \\ &= d((t_1, \dots, t_L), (0_1, \dots, 0_{L-k}, 1_{L-k+1}, \dots, 1_L)) - A + B \end{aligned}$$

przy czym:

$$A = t_{i_1} + (1 - t_{i_1}) + \dots + t_{i_p} + (1 - t_{i_p})$$

$$B = (1 - t_{i_1}) + t_{i_1} + \dots + (1 - t_{i_p}) + t_{i_p}$$

Aby zakończyć dowód wystarczy zauważyć, że $A \leq p$ i $B \geq p$, co wynika bezpośrednio z (1).

Podsumowanie

W artykule przedstawiono algorytm znajdowania wektora liczb całkowitych o zadanej sumie elementów najbliższego danemu wektorowi liczb rzeczywistych w świetle metryki l_1 . Udowodniono, że wektor liczb całkowitych znaleziony za pomocą algorytmu jest istotnie elementem optymalnym w zbiorze wektorów liczb całkowitych o zadanej sumie składowych. Przedstawiony algorytm stosowany jest przez autora w celu ustalania alokacji próby w badaniu transportu i zaimplementowany w języku R.

mgr Marcin Muraszew — GUS

LITERATURA

- Bracha C. (1996), *Teoretyczne podstawy metody reprezentacyjnej*, PWN, Warszawa
Lednicki B., Wieczorkowski R. (2003), *Optymalna alokacja próby pomiędzy subpopulacje i warstwy*, „Wiadomości Statystyczne”, nr 10, GUS, Warszawa
Zasępa R. (1962), *Teoretyczne podstawy metody reprezentacyjnej*, PWE, Warszawa
Zasępa R. (1972), *Metoda reprezentacyjna*, PWE, Warszawa

SUMMARY

The Author presents his algorithm to find the next vector of long integers of a given element sum to a given vector of real numbers under metric l_1 . Practical algorithm applications in the context of the unit stage stratified sampling without replacement are described in the article. It is proved that the vector of long integers found by algorithm is an optimal element in a vector file of the given component sum. The presented algorithm is applied by the Author to fix the sample allocation in transportation surveys and is implemented in R language.

РЕЗЮМЕ

Статья представляет составленный автором алгоритм определения самого близкого вектора целых чисел с поданной суммой элементов, для поданного вектора вещественных чисел в свете метрики l_1 . В статье описывается практическое использование алгоритма в контексте использования схемы одноступенчатой слоевой выборки без возвращения. Было доказано, что вектор полных чисел определенный с помощью алгоритма действительно является оптимальным элементом в множестве векторов целых чисел с предварительно определенной суммой компонентов. Представленный алгоритм используется автором для установления способа выборки в обследовании транспорта и осуществлена в языке R.